

Varianta 73

Subiectul I

- a) $AB = \sqrt{13}$.
- b) $\operatorname{Re}(z) = -1$.
- c) $d = 2\sqrt{2}$.
- d) $\sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.
- e) $E = -2$.
- f) $a = -1, b = -3$.

Subiectul II

1.

- a) $S_5 = 55$.
- b) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.
- c) $f(f(-1)) = -5$.
- d) $A^2 + I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- e) $x_1 = 0, x_2 = 2$.

2.

- a) $f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2}, x \in \mathbf{R}^*$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 5$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{3x + 1} = \frac{4}{3}$.
- d) dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- e) $\int_1^2 f(x) dx = 6 - \ln 2$.

Subiectul III

- a) Evident A comută cu A la înmulțire deci $A \in G$.

Din $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, rezultă $I_2 \in G$.

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1.$

c) $A^2 = -I_2.$

d) Obținem $A^2 X = X A^2 = -X, \forall X \in M_2(\mathbf{R}).$

e) $BA = (aI_2 + bA)A = aA - bI_2, AB = A(aI_2 + bA) = aA - bI_2 \Rightarrow AB = BA \Rightarrow B \in G.$

f) $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^4 = I_2 \Rightarrow A^{4n} = (A^4)^n = I_2^n = I_2.$

g) Din punctul **f)** rezultă $A^{4k} = I_2, A^{4k+1} = A, A^{4k+2} = -I_2, A^{4k+3} = -A, \forall k \in \mathbf{N}^*.$

Deci $A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3} = O_2.$

Atunci $B = A + A^2 + A^3 + (A^4 + A^5 + A^6 + A^7) + \dots (A^{2004} + A^{2005} + A^{2006} + A^{2007}) =$
 $= A + A^2 + A^3 = A - I_2 - A = -I_2.$ Suma elementelor matricei B este -2.

Subiectul IV

a) $1 + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$

b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$

c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0].$ Rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0].$

d) $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \Leftrightarrow x = 0.$

e) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = (x + \arctg x) \Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4}.$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) = 1,$ deci $y = 1$ este ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

g) Din punctul **d)**, rezultă $f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbf{R}$ și $f(y) \leq 2, \forall y \in \mathbf{R}.$ Adunând cele două relații, rezultă $f(x) + f(y) \leq 4, \forall x, y \in \mathbf{R},$ cu egalitate dacă și numai dacă $f(x) = 2$ și $f(y) = 2.$ Rezultă $x = y = 0.$